

Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД

- из физике -

Фукоово клатно

Ученик:
Милош Пурић IVд

Ментор:
др Дејан Ђокић

Београд, мај 2022.

Садржај

1	Увод	1
1.1	Леон Фуко	1
1.2	Фукоово клатно	1
2	Инерцијалне силе	3
2.1	Праволинијско убрзано кретање и ротација	3
2.2	Ојлерова сила	4
2.3	Кориолисова сила	4
3	Путања Фукоовог клатна	5
3.1	Општа једначина кретања	5
3.2	Апроксимација	7
4	JavaScript анимација - облици путање	9
4.1	Фактор K и географска ширина ϕ	9
4.2	Пролазак кроз равнотежни положај	10
4.3	Незаобљене путање	11
5	Закључак	12
6	Литература	13

1 Увод

1.1 Леон Фуко

Француски физичар Леон Фуко (1819-1868) један је од 72 научника чија су презимена угравирана на првој платформи Ајфеловог торња у Паризу.



Жан Бернар Леон Фуко

Извор: thoughtco.com

Пре него што је кренуо да се бави физиком, Фуко је започео студије медицине од којих је одустао због претераног страха од крви. Радећи као асистент француског доктора Алфреда Донеа почео је да га интересује експериментални рад. Наследио је Донеа на месту научног уредника недељних новина *Journal des débats* 1845. године. Краљевско друштво Лондона му је 1850. године доделило Коплијеву медаљу за његов рад у коме је објаснио везу између механичке енергије, топлоте и магнетизма. Касније, 1855. године, је приметио да се у металном диску који ротира између полова јаког магнета формирају електричне струје (*Eddy currents*) које га загревају. Сматра се да је његово откриће споријег простирања светлости кроз воду него кроз ваздух из 1860. године коначно побиле Њутнову корпускуларну теорију светлости у потпуности [1]. Користећи исти уређај којим је дошао до тог открића, познат под именом *Fizeau-Foucault apparatus*, извршио је мерење брзине светлости којим је добио вредност 0.6% мању од тачне [2]. Постављен је на место физичара париске опсерваторије 1855. године, а 1862. године је постао члан чувеног научног удружења *Bureau des Longitudes* којем су припадали и познати математичари попут Поенкареа, Лапласа и Лагранжа [3].

1.2 Фукоово клатно

Поред наведених достигнућа, Фуко је познат и по томе што је 1851. године експерименталним путем показао да планета Земља ротира око своје осе.

Уређај који је користио како би то учинио састојао се од 28 kg тешке гвоздене кугле окачене о 67 m дугачку сајлу, фиксирану за плафон тако да је омогућено кретање без отпора у сваком правцу [4]. Његова замисао је била да ће овако конструисано клатно одржавати своју раван осцилације у простору, због чега ће оно посматрачу са Земље, уколико Земља заиста ротира око своје осе, одавати утисак да се раван осцилације током времена мења.



Фукоово клатно у Пантеону

Извор: wikipedia.org

Фуко је демонстрирао рад клатна у париској опсерваторији у присуству већег броја научника. У писаној форми је представио формулу за период обртања равни осцилације клатна [5]:

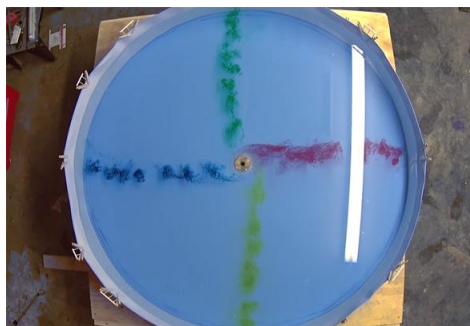
$$T = \frac{24 \text{ h}}{\sin q}$$

Овај ефекат је једна од последица деловања инерцијалних сила, међу којима су и ротирање урагана [6], ерозија десних обала река које на Земљиној северној хемисфери теку ка северу [7], као и ротација воде при понирању кроз уски отвор.



Ротација урагана на северној хемисфери

Извор: ара.org



Ротација воде при понирању

Извор: youtube.com/c/smartereveryday

У овом раду биће изложена теоријска позадина Фукоовог клатна. Циљ је објаснити његово кретање једначинама из којих је могуће извести закључке о томе на који начин се сама Земља креће.

2 Инерцијалне силе

За референтни систем кажемо да је *инерцијалан* када у њему важи први Њутнов закон, тј. када сва тела у њему настављају да мирују или да се крећу константном векторском брзином ако и само ако је векторски збир сила које на њега делују једнак нули. У супротном је тај референтни систем *неинерцијалан* [8].

Нека је A инерцијалан референтни систем, а B неинерцијалан референтни систем - његов почетак се креће са неким убрзањем у односу на A . Ако са \vec{r}_A означимо вектор положаја неког тела масе m у референтном систему A , а са $\vec{r}_B = (x_1, x_2, x_3)$ вектор положаја истог тела у систему B , онда важи

$$\vec{r}_A = \vec{r}_{AB} + \vec{r}_B \quad (1)$$

где је \vec{r}_{AB} вектор који у сваком тренутку повезује почетак система A и почетак система B . Вектор \vec{r}_B можемо написати у облику $\sum_{j=1}^3 x_j \vec{e}_j$ ако уведемо јединичне векторе \vec{e}_1 , \vec{e}_2 и \vec{e}_3 у правцима координатних оса система B . Диференцирајући двапут обе стране једнакости (1) добијамо [9]

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_A}{dt} &= \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} + \sum_{j=1}^3 \frac{dx_j}{dt} \vec{e}_j + \sum_{j=1}^3 x_j \frac{d\vec{e}_j}{dt} \\ \frac{d^2\vec{r}_A}{dt^2} &= \frac{d^2\vec{r}_{AB}}{dt^2} + \sum_{j=1}^3 \frac{d^2x_j}{dt^2} \vec{e}_j + 2 \sum_{j=1}^3 \frac{dx_j}{dt} \frac{d\vec{e}_j}{dt} + \sum_{j=1}^3 x_j \frac{d^2\vec{e}_j}{dt^2} \end{aligned}$$

Први и трећи члан слева у последњој једначини су једнаки убрзању тела у систему A и убрзању тела у систему B , редом. Њих ћемо означити са \vec{a}_A и \vec{a}_B и помножићемо обе стране са масом тела m .

$$m\vec{a}_A = m\vec{a}_B + m \frac{d^2\vec{r}_{AB}}{dt^2} + 2m \sum_{j=1}^3 \frac{dx_j}{dt} \frac{d\vec{e}_j}{dt} + m \sum_{j=1}^3 x_j \frac{d^2\vec{e}_j}{dt^2}$$

Ово значи да ако други Њутнов закон за тело масе m у инерцијалном систему A важи у облику $\vec{F}_A = m\vec{a}_A$, онда у неинерцијалном систему B он гласи

$$\vec{F}_B = m\vec{a}_B = \vec{F}_A - \left(m \frac{d^2\vec{r}_{AB}}{dt^2} + 2m \sum_{j=1}^3 \frac{dx_j}{dt} \frac{d\vec{e}_j}{dt} + m \sum_{j=1}^3 x_j \frac{d^2\vec{e}_j}{dt^2} \right) = \vec{F}_A + \vec{F}_i \quad (2)$$

Дакле, поред сила које постоје у систему A , посматрач у систему B уз то види и \vec{F}_i - збир три *инерцијалне силе*.

2.1 Правoliniјско убрзано кретање и ротација

Први сабирак у \vec{F}_i једнак је $-m\vec{a}_{AB}$ где је \vec{a}_{AB} убрзање почетка система B у односу на систем A . Када се, на пример, систем B креће равномерно убрзано по правој линији у односу на систем A , односно када је $\vec{a}_{AB} = \text{const}$, ову силу знамо као стандардну инерцијалну силу која у систему B на тело делује у смеру супротном од ког оно убрзава у A .

Када систем B ротира угаоном брзином $\vec{\omega}$ у односу на A , тада је $\vec{a}_{AB} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB})$, па овај члан постаје $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB})$. Ова сила која се јавља у систему B је позната као центрифугална сила.

2.2 Ојлерова сила

Трећи сабирак у \vec{F}_i се назива Ојлерова сила и присутан је услед промене угаоне брзине ротације система B око система A . У поједностављеном случају када почетак система B ротира око система A угаоном брзином $\vec{\omega}$ сталног правца и растућег интензитета, ова сила је $\vec{F}_{az} = -m \frac{d\omega}{dt} (\vec{e}_\omega \times \vec{r}_{AB})$, где је \vec{e}_ω јединични вектор у правцу вектора $\vec{\omega}$ [10].

2.3 Кориолисова сила

Преостали, други по реду, члан збира инерцијалних сила \vec{F}_i је Кориолисова сила:

$$\vec{F}_{cor} = -2m \sum_{j=1}^3 \frac{dx_j}{dt} \frac{d\vec{e}_j}{dt}$$

Нека референтни систем B ротира угаоном брзином $\vec{\omega}$ око почетка референтног система A . Може се показати да тада за сваки од јединичних вектора \vec{e}_j координатних оса система B важи [11]

$$\frac{d\vec{e}_j}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}_j$$

што значи да израз за Кориолисову силу сада узима облик

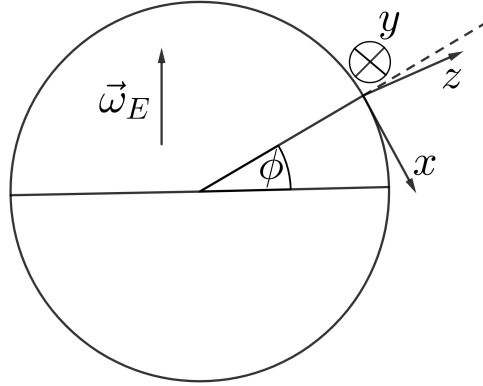
$$\begin{aligned} \vec{F}_{cor} &= -2m \sum_{j=1}^3 \frac{dx_j}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{e}_j) = -2m \left(\vec{\omega} \times \sum_{j=1}^3 \frac{dx_j}{dt} \vec{e}_j \right) \\ \vec{F}_{cor} &= -2m (\vec{\omega} \times \vec{v}_B) \end{aligned}$$

Из последње једначине се може закључити да је правац Кориолисове силе нормалан на $\vec{\omega}$ - угаону брзину система B у односу на систем A , као и на \vec{v}_B - брзину којом се тело креће у односу на референтни систем B . Управо ова сила која у сваком тренутку делује нормално на правац кретања тела је главни узрок необичној путањи Фукоовог клатна.

3 Пућања Фукоовог клатна

Посматрајмо клатно које се налази на Земљи, на географској ширини ϕ ($\phi \in [-90^\circ, 90^\circ]$). Оно се састоји од сајле дужине l и тела масе m окаченог о њу.

Нека је неротирајући, инерцијални референтни систем A такав да се правац и смер његове треће, z -осе, поклапају са правцем и смером вектора Земљине ротације око своје осе $\vec{\omega}_E$. Референтни систем B је систем чији је почетак везан за положај Фукоовог клатна на Земљи. Он заједно са Земљом ротира око A угаоном брзином $\vec{\omega}_E$. Оријентисаћемо осе у систему B тако да је x оса тангента на локални меридијан и усмерена је ка јужном полу, y оса тангента на локалну паралелу и усмерена је ка истоку, а z оса има правац локалног убрзања Земљине теже \vec{g} (слика 1).



Слика 1: Положај и оријентација оса система B

3.1 Општа једначина кретања

Користећи једначину (2) и поједностављене изразе за чланове \vec{F}_i који важе у случају којим се бавимо, други Њутнов закон за тело масе m на крају Фукоовог клатна гласи:

$$m\vec{a}_B = \vec{F}_A - m\vec{\omega}_E \times (\vec{\omega}_E \times \vec{r}_{AB}) - 2m(\vec{\omega}_E \times \vec{v}_B) - m \frac{d|\vec{\omega}_E|}{dt} \left(\frac{\vec{\omega}_E}{|\vec{\omega}_E|} \times \vec{r}_{AB} \right)$$

Узевши у обзир да се дужина дана, услед успоравања Земљине ротације око своје осе, продужила за само 2.3 ms од 8. века пре нове ере до данас [12], можемо сматрати да се $\vec{\omega}_E$ не мења и тако потпуно занемарити утицај четвртог сабирка са десне стране знака једнакости, Ојлерове силе.

Други сабирак са десне стране, једнак центрифугалној сили, ће искључиво променити правац вектора убрзања Земљине теже за мали угао. Њега ћемо у једначини изоставити, а за његов утицај сматрати да је урачунат у промену правца вектора \vec{g} . На слици 1 је, вероватно пренаглашено, истакнуто ово одступање z осе система B , која дели правац са вектором \vec{g} , од правца који би она имала када не би било центрифугалне силе.

Вектор \vec{F}_A представља збир сила које посматрач у систему A види, а то су сила затезања сајле \vec{T} и сила Земљине теже \vec{F}_g . Управо у изразу $\vec{F}_g = m\vec{g}$ користимо ново \vec{g} чији је правац незнатно промењен. Сада други Њутнов закон има једноставнији запис:

$$m\vec{a}_B = \vec{T} + m\vec{g} - 2m(\vec{\omega}_E \times \vec{v}_B) \quad (3)$$

Раставимо ову једначину по компонентама паралелним координатним осама x , y и z система B , тј. њиховим јединичним векторима \vec{e}_x , \vec{e}_y , и \vec{e}_z :

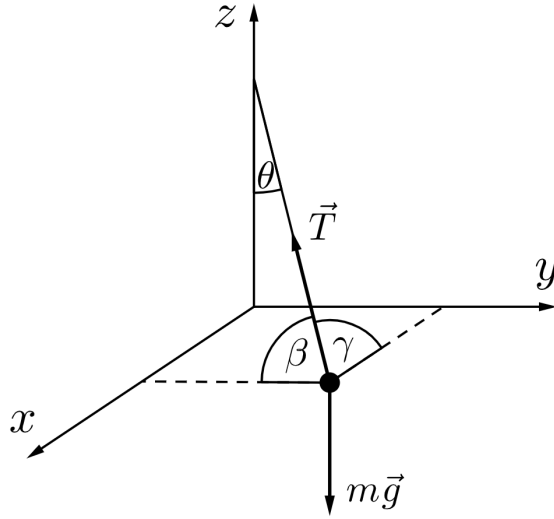
$$\vec{g} = (0, 0, g) \quad \vec{\omega}_E = (-\omega_E \cos \phi, 0, \omega_E \sin \phi)$$

$$\vec{v}_B = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \quad \vec{a}_B = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2} \right)$$

При рачунању x и z компоненти вектора $\vec{\omega}_E$ занемарили смо отклон z осе од правца ка центру Земље услед дејства центрифугалне силе. Даље, Кориолисова сила је једнака:

$$\begin{aligned} -2m(\vec{\omega}_E \times \vec{v}_B) &= -2m \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \omega_{E,x} & \omega_{E,y} & \omega_{E,z} \\ v_{B,x} & v_{B,y} & v_{B,z} \end{vmatrix} = -2m \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -\omega_E \cos \phi & 0 & \omega_E \sin \phi \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \end{vmatrix} = \\ &= -2m \left(\vec{e}_x \left(-\frac{dy}{dt} \omega_E \sin \phi \right) - \vec{e}_y \left(-\frac{dz}{dt} \omega_E \cos \phi - \frac{dx}{dt} \omega_E \sin \phi \right) + \vec{e}_z \left(-\frac{dy}{dt} \omega_E \cos \phi \right) \right) \\ &= -2m \left(-\frac{dy}{dt} \omega_E \sin \phi, \frac{dz}{dt} \omega_E \cos \phi + \frac{dx}{dt} \omega_E \sin \phi, -\frac{dy}{dt} \omega_E \cos \phi \right) \end{aligned}$$

Користићемо следећу скицу да одредимо компоненте вектора силе затезања \vec{T} .



Слика 2: Сила затезања и Земљина тежа у систему B

Уз једнакости $\cos \gamma = \frac{x}{l}$ и $\cos \beta = \frac{y}{l}$, са слике 2 добијамо

$$\vec{T} = (-T \cos \gamma, -T \cos \beta, T \cos \theta) = \left(-T \frac{x}{l}, -T \frac{y}{l}, T \cos \theta \right)$$

Сада можемо раставити једначину (3) по компонентама x , y и z :

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= -T \frac{x}{l} + 2m \frac{dy}{dt} \omega_E \sin \phi \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= -T \frac{y}{l} - 2m \omega_E \left(\frac{dz}{dt} \cos \phi + \frac{dx}{dt} \sin \phi \right) \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= T \cos \theta - mg + 2m \frac{dy}{dt} \omega_E \cos \phi \end{aligned}$$

Сматраћемо да, због тога што су и угаони отклон тела θ и вертикални отклон тела у смеру z осе мали, важи $T \cos \theta \approx T \approx mg$ и $\frac{dz}{dt} \approx 0$. Другим речима, посветићемо се путањи тела масе m искључиво у равни xy . Ова апроксимација довољно добро описује његово кретање једначинама [13] [14]:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x\frac{g}{l} + 2\frac{dy}{dt}w_E \sin \phi$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -y\frac{g}{l} - 2\frac{dx}{dt}w_E \sin \phi$$

Заменићемо $w_0^2 = \frac{g}{l}$ и $\Omega = w_E \sin \phi$, а потом спојити ове две једначине по x и y у једну једначину по комплексној променљивој $u = x + iy$.

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2i\Omega\frac{du}{dt} + w_0^2u = 0 \quad (4)$$

Решење ове диференцијалне једначине ћемо тражити у облику $u(t) = C \cdot e^{\gamma t}$ где су C и γ константе које припадају скупу комплексних бројева \mathbb{C} . Убацавањем у (4) добијамо могуће вредности за γ :

$$\gamma^2 + 2i\Omega\gamma + w_0^2 = 0$$

$$\gamma_{1,2} = i \left(-\Omega \pm \sqrt{\Omega^2 + w_0^2} \right)$$

Опште решење једначине (4) је зато

$$u(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t} \quad (5)$$

Константе C_1 и C_2 су комплексни бројеви који се могу одредити из услова почетног положаја и почетне брзине тела, односно из вредности $u(0)$ и $\frac{du}{dt}(0)$.

3.2 Апроксимација

Да бисмо поједноставили изразе за $\gamma_{1,2}$ користићемо Маклоренов развој функције $(1+x)^\alpha$:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0) \quad (1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n) \quad \text{када } x \rightarrow 0$$

Овај развој има смисла применити за $x = \frac{\Omega^2}{w_0^2}$ јер је $\Omega \leq w_E \ll w_0$.

$$(\Omega^2 + w_0^2)^{\frac{1}{2}} = w_0 \left(1 + \frac{\Omega^2}{w_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} = w_0 \left(1 + \binom{\frac{1}{2}}{1} \frac{\Omega^2}{w_0^2} + \dots + \binom{\frac{1}{2}}{n} \frac{\Omega^{2n}}{w_0^{2n}} + o\left(\frac{\Omega^{2n}}{w_0^{2n}}\right) \right) \quad \text{када } \frac{\Omega^2}{w_0^2} \rightarrow 0$$

Ако искористимо само први члан развоја добијамо

$$\gamma_{1,2} = i(-\Omega \pm w_0)$$

$$u(t) = e^{-i\Omega t} (C_1 e^{iw_0 t} + C_2 e^{-iw_0 t})$$

Решење које се добија за $C_1 = C_2 = C \in \mathbb{R}$ је

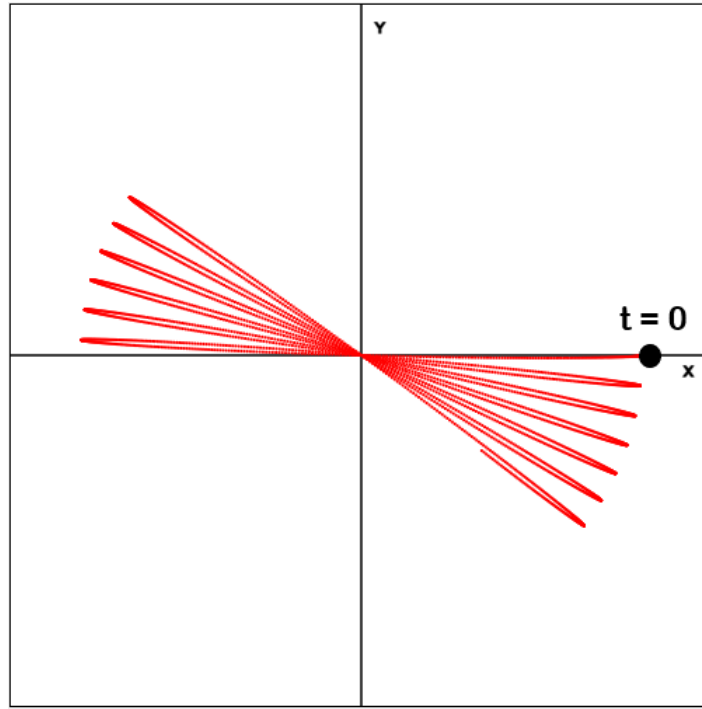
$$u(t) = 2C e^{-i\Omega t} \cos(w_0 t)$$

што се после растављања на реални и имагинери део своди на [13]

$$x(t) = 2C \cos(\Omega t) \cos(w_0 t)$$

$$y(t) = -2C \sin(\Omega t) \cos(w_0 t)$$

За разлику од једначине (5), из овог партикуларног решења је лако предвидети како ће изгледати кретање клатна.



Слика 3: Решење једначине (5) за $C_1 = C_2 = C$

Амплитуда осциловања је овде $2C$, а почетни услови овог решења су $x(0) = 2C$, $y(0) = 0$, $\frac{dx}{dt}(0) = 0$, $\frac{dy}{dt}(0) = -2C\Omega$. Чиниоци $\cos(\omega_0 t)$ у једначинама за $x(t)$ и $y(t)$ постоје и у једначинама кретања уобичајених хармонијских осцилатора, па су они и овде ти који стварају осцилаторно кретање тела. С друге стране, чиниоци $\cos(\Omega t)$ и $\sin(\Omega t)$ су присутни захваљујући Земљиној ротацији. Они су заслужни за то што су $2C \cos(\Omega t)$ и $2C \sin(\Omega t)$, тј. амплитуде осциловања по x и y оси редом, временски зависне. У сваком тренутку у времену, једна од ових амплитуда расте, а друга се смањује. Њихова монотоност се периодично мења, што узрокује промену равни осцилације са периодом

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_E \sin \phi} = \frac{24 \text{ h}}{\sin \phi}$$

што се подударе са Фукоовим *синусним законом* [5].

Могу се користити и прва два члана Тејлоровог развоја, чиме се добијају нешто прецизније вредности:

$$\gamma_{1,2} = i\left(-\Omega \pm \left(\omega_0 + \frac{1}{2} \frac{\Omega^2}{\omega_0}\right)\right)$$

Све у свему, обе апроксимације успешно објашњавају феномен предвиђајући да маса окачена за сајлу мора мењати своју равну осцилацију као на слици 3. У наредном поглављу се можемо уверити да оне заиста не одступају превише од реалне путање тела.

4 JavaScript анимација - облици путање

На линку <https://losmi247.github.io/foucault-pendulum/> направљена је JavaScript анимација путање Фукоовог клатна. За симулацију је коришћена једначина (5)

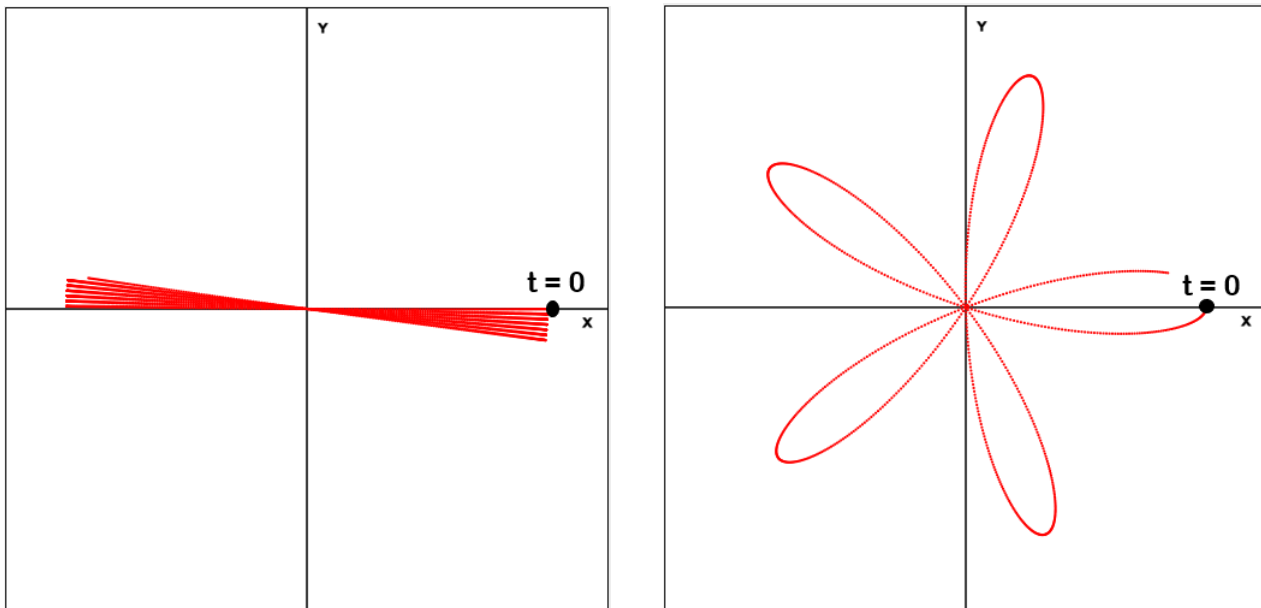
$$u(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t}$$

зато што поседује најопштији облик. Другим речима, одговарајућим одабиром комплексних константи C_1 и C_2 могуће је добити свако решење диференцијалне једначине (4). Поред C_1 и C_2 , омогућено је и подешавање географске ширине ϕ положаја клатна на Земљи, као и множење брзине Земљине ротације око своје осе ω_E фактором K , са циљем да се ефекат учини видљивијим.

Коришћено је клатно дужине $l = 40$ m, па је, поред $\omega_E \approx 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, фиксирана и величина $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \approx 0.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, где је позната вредност убрзања Земљине теже $g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

4.1 Фактор K и географска ширина ϕ

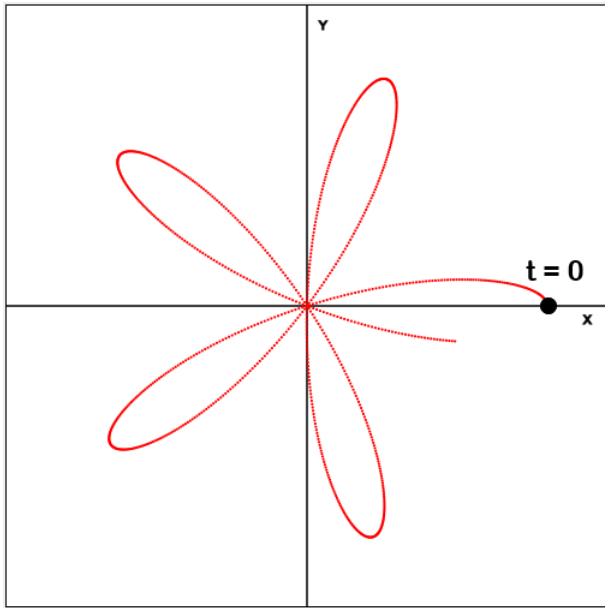
Назовимо раван у којој клатно осцилује α . При малим брзинама ротације планете (слика 4), блиским Земљином, стиче се утисак да се током сваког периода осцилације α промени за угао конкретне вредности. Уколико убрзамо ротацију планете стављајући $K = 1000$ (слика 5), добијамо фигуру са које се види да се раван α у ствари континуално мења. На свакој слици почев од слике 6 се подразумева да важи $K = 1000$.



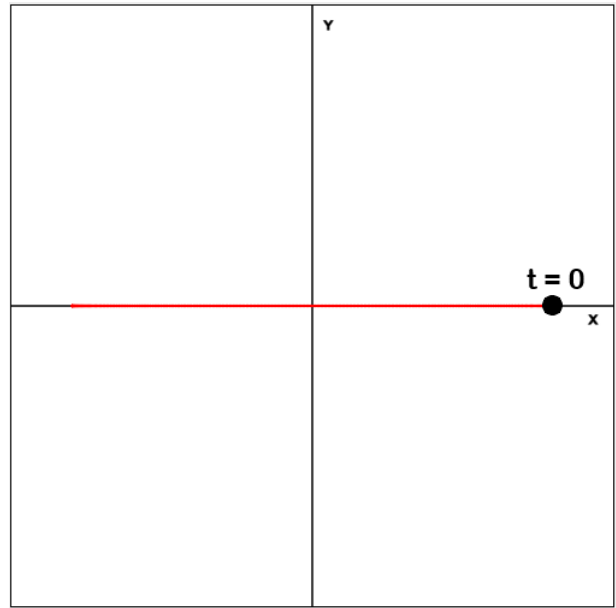
Слика 4: $C_1 = C_2 = 100$ m, $K = 20$, $\phi = 90^\circ$ Слика 5: $C_1 = C_2 = 100$ m, $K = 1000$, $\phi = 90^\circ$

Пошто се раван α окреће угаоном брзином $\Omega = \omega_E \sin \phi$, смањивање угла ϕ , који одговара географској ширини, даје сличне резултате као и смањивање фактора K - згушњава кракове фигуре као на слици 4. Сликe 4 и 5 одговарају кретању клатна на северној хемисфери планете. На јужној хемисфери планете путање су симетричне приказаним у односу на x осу (слика 6). За положаје на том делу планете, по договору, важи $\phi < 0$, па се ово може објаснити променом знака угаоне брзине Ω услед промене знака чиниоца $\sin \phi$.

Екстремни случај се дешава на екватору планете, где се α не мења (слика 7). У том случају, којом год брзином \vec{v}_B се маса m кретала у референтном систему B , правац деловања Кориолисове силе $\vec{F}_{cor} = -2m(\vec{\omega}_E \times \vec{v}_B)$ ће увек бити паралелан правцу локалног убрзања Земљине теже \vec{g} . Зато је на екватору компонента силе \vec{F}_{cor} која је нормална на правац кретања тела једнака 0, што онемогућава промену правца осцилације.



Слика 6: $C_1 = C_2 = 100 \text{ m}$, $\phi = -90^\circ$



Слика 7: $C_1 = C_2 = 100 \text{ m}$, $\phi = 0^\circ$

4.2 Пролазак кроз равнотежни положај

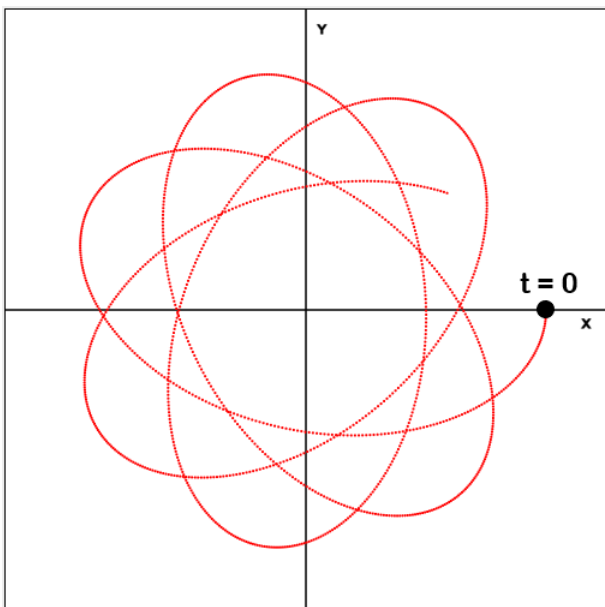
За наредних неколико примера корисно је имати на уму начин на који се мења растојање тела од равнотежног положаја:

$$\begin{aligned}
 |u(t)|^2 &= u(t)\overline{u(t)} = (C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t})(\overline{C_1} e^{-\gamma_1 t} + \overline{C_2} e^{-\gamma_2 t}) = \\
 &= |C_1|^2 + |C_2|^2 + C_1 \overline{C_2} e^{(\gamma_1 - \gamma_2)t} + \overline{C_1} C_2 e^{(\gamma_2 - \gamma_1)t} \\
 &= |C_1|^2 + |C_2|^2 + 2 \cdot \text{Re}\{C_1 \overline{C_2} e^{(\gamma_1 - \gamma_2)t}\}
 \end{aligned}$$

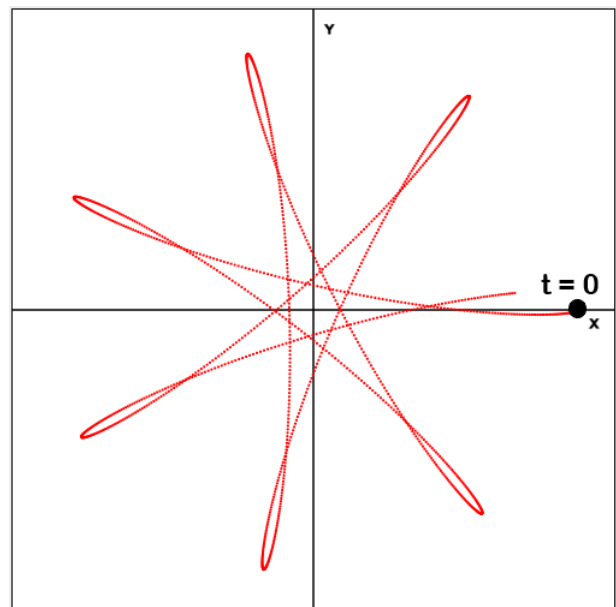
Последњи члан у збиру може узимати вредности од $-2|C_1||C_2|$ до $2|C_1||C_2|$, па важи

$$(|C_1| - |C_2|)^2 \leq |u(t)|^2 \leq (|C_1| + |C_2|)^2 \quad (6)$$

при чему се све наведене дозвољене вредности квадрата растојања тела од центра координатног система заиста у неком тренутку постижу.



Слика 8: $C_1 = 50 \text{ m}$, $C_2 = 150 \text{ m}$, $\phi = 45^\circ$



Слика 9: $C_1 = 120 \text{ m}$, $C_2 = 100 \text{ m}$, $\phi = 45^\circ$

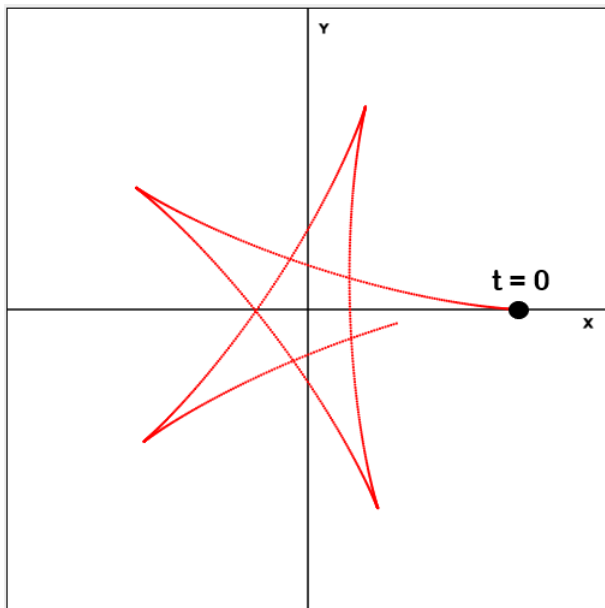
Дакле, клатно ће пролазити кроз свој равнотежни положај ако и само ако важи $|C_1| = |C_2|$, зато што, по неједнакости 6, једначина $u(t) = 0$ једино у том случају има решења по променљивој t .

За комплексне бројеве C_1 и C_2 који не испуњавају овај услов, као на сликама 8 и 9, добијају се путање које не пролазе кроз центар равни xy . На свим путањама максимална удаљеност од координатног почетка коју тело достиже је $|C_1| + |C_2|$, а минимална удаљеност коју тело достиже је $||C_1| - |C_2||$. Овде је $|C_1| \neq |C_2|$, па је минимална удаљеност већа од нуле.

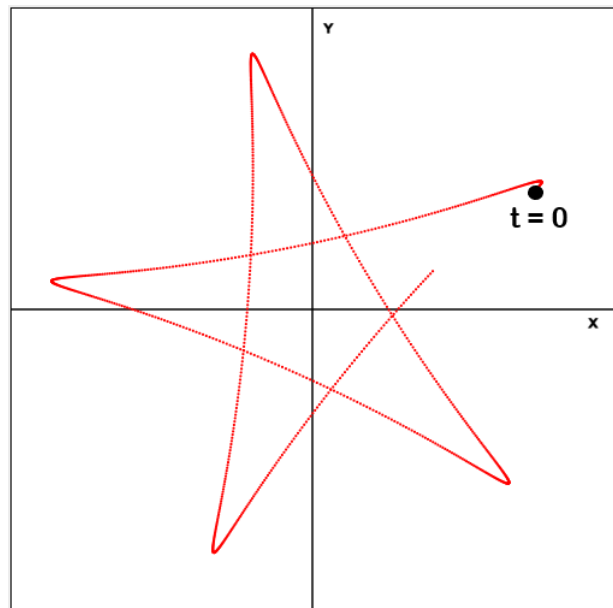
4.3 Незаобљене путање

Путања на слици 9 сугерише да се кракови фигуре могу произвољно стаћити. Заиста, као на слици 10, могуће је да укупна брзина тела буде једнака нули сваки пут када се оно налази на амплитудном растојању од равнотежног положаја. На пример, када се клатно налази на Северном полу, то се дешава ако важи $V = \Omega D$, где је $(D, 0)$ вектор почетног положаја клатна и у инерцијалном систему A и у неинерцијалном систему B , а вектор $(0, V)$ почетна брзина клатна у инерцијалном систему A [15].

Овај услов се добија из чињенице да ако је $(0, V)$ почетна брзина у систему A , онда је почетна брзина у систему B једнака $(0, V - \Omega D)$ [15].



Слика 10: $C_1 = 105 \text{ m}$, $C_2 = 70 \text{ m}$, $\phi = 90^\circ$



Слика 11: $C_1 = (130 + 40 \cdot i) \text{ m}$,

$$C_2 = (56 + 60 \cdot i) \text{ m}, \phi = 90^\circ$$

На слици 11 је приказана једна незаобљена путања одређена комплексним вредностима C_1 и C_2 са ненултим имагинарним делом. Пошто $u(0) = C_1 + C_2$ у овом случају није ни чисто реалан ни чисто имагинаран број, почетни положај клатна се не налази ни на једној од оса x и y .

5 Закључак

Дискутована је теоријска позадина рада Фукоовог клатна. Теоријски је потврђена исправност Фукоовог закона за период ротације равни осцилација и представљено је неколико облика путање којом се клатно може кретати. Предочен је главни узрок необичном кретању клатна - постојање инерцијалне Кориолисове силе у неинерцијалним референтним системима. Резултати представљене симулације на рачунару наговештавају да поједностављења која су била коришћена приликом извођења једначина које описују кретање нису учинила да се оно битно разликује од стварног. При томе, добијене путање врло јасно указују на то да је начин на који се Земља креће нешто компликованији, односно имплицирају њену ротацију око своје осе.

Овим путем желим да се искрено захвалим ментору на матурском раду др Дејану Ђокићу на свом пренетом знању, за подршку током израде, као и за многобројне корисне савете који су се односили на саму садржину рада, али и на његову организацију и систематичност.

6 Литература

- [1] David C. Cassidy, F. James Rutherford, and Gerald Holton. “Understanding Physics: Student Guide”. In: Springer (2002).
- [2] Philip Gibs. “How is the speed of light measured?” In: The Original Usenet Physics FAQ (July 2015).
- [3] <https://www.newadvent.org/cathen/06156c.htm>. “Jean Bernard Leon Foucault” (accessed on February 2022).
- [4] <https://www.britannica.com/biography/Leon-Foucault>. “Leon Foucault” (accessed on February 2022).
- [5] <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Foucault/>. “Jean Bernard Leon Foucault” (accessed on February 2022).
- [6] Robert A. Dickerson. “Phenomenological Analysis of Forces in Hurricane Dynamics” (2006), p. 12.
- [7] Zoltan Balla. “The Influence of the Coriolis Force on Rivers and the Baer Law”. In: Geological Institute of Hungary (2007).
- [8] Michael Fowler. “Notes on Special Relativity”. In: University of Virginia (Mar. 2008), p. 3.
- [9] Alexander L. Fetter and John Dirk Walecka. “Theoretical Mechanics of Particles and Continua”. In: Courier Dover Publications (2003), pp. 44–51.
- [10] David Morin. “Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions”. In: Cambridge University Press (2008), p. 469.
- [11] John R. Taylor. “Classical Mechanics”. In: Sausalito CA: University Science Books (2004), pp. 343–344.
- [12] F. Richard Stephenson. “Historical Eclipses and Earth’s Rotation”. In: Astronomy and Geophysics 44.2 (Apr. 2003), pp. 2.22–2.27.
- [13] J. Stiewe. “The Foucault Pendulum’s Trajectory - the Formalism”. In: KIP (Apr. 2008).
- [14] A. Reiser and J. Stiewe. “The Foucault Pendulum - a Simplified Trajectory Analysis for a Pendulum on a Turntable and an Outlook to a Pendulum on Earth”. In: KIP (Sept. 2018).
- [15] <https://www.aapt.org/Common2022/pastexams.cfm>. “2020 USAPhO exam Question A2” (accessed on February 2022).